

数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ⅳ・数学Ⅴ

1 数学Ⅰ・数学Ⅱ 1の(1)・(2)に同じ。

2 (1) 条件より $\overrightarrow{OD} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\vec{c}$

また、FはDEを1:2に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OE} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\vec{c} \\ &= \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c} \quad \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$

(2) PはOFと△ABCの交点より、任意の実数kを用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= k\overrightarrow{OF} \\ &= k\left(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}\right) \\ &= \frac{4}{9}k\vec{a} + \frac{2}{9}k\vec{b} + \frac{1}{9}k\vec{c} \quad \dots\dots\text{①}\end{aligned}$$

これが平面ABC上に存在するから

$$\frac{4}{9}k + \frac{2}{9}k + \frac{1}{9}k = 1 \quad \text{より} \quad k = \frac{9}{7}$$

①より $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c} \quad \dots\dots(\text{答})$

3

(1) 接点を (p, q) とすると

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 16 \\ px + qy = 16 \end{cases} \dots\dots ①$$

(4, 8) を通るので

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 16 \\ 4p + 8q = 16 \end{cases}$$

これを解くと

$$(p, q) = (4, 0), \left(-\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) \dots\dots ②$$

②を①に代入すると、接線の方程式は

$$x = 4, -3x + 4y = 20 \dots\dots (\text{答})$$

(2) 2点 Q, R を通る直線は、②より

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

点 P(4, 8) との距離 ℓ は

$$\ell = \frac{|4 + 16 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5} \dots\dots (\text{答})$$

(3) $QR = \sqrt{\left(4 + \frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$ であるから

$$S = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot \ell$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{5} = \frac{128}{5} \dots\dots (\text{答})$$